Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"

ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015

CLASA a IV-a

Barem

Subiectul 1.

a) În șirul 2015, *a*, 2007, *b*, *c* suma oricăror trei termeni consecutivi este aceeași. Să se calculeze *a*-*c*.

b) Pe niște bilete sunt scrise numere naturale (câte un număr pe fiecare bilet), astfel încât suma și produsul lor sunt egale cu 12. Aflați numărul biletelor. (Găsiți toate soluțiile posibile).

Gazeta Matematică

Soluție

a) $a+2007+b=2007+b+c$..2p

$a=c$...1p

$a-c = 0$..1p

b) 12 se poate scrie ca produs 2x6, 3x4, 2x2x3. În scrierea acestor produse se poate folosi un număr convenabil de 1...1p

Avem:

2+6+1+1+1+1; 3+4+1+1+1+1+1; 2+2+3+1+1+1+1+1..........................1p

Numărul biletelor poate fi 6,7 sau 8...1p.

Subiectul 2

Un elev a cumpărat 8 caiete și 12 creioane pentru care a plătit 144 lei.

Un alt elev a cumpărat 10 caiete și 15 creioane de același fel cu colegul său.

a) Aflați câți lei a încasat librăria de la cei doi elevi?

b) Câți lei costă un creion dacă un caiet costă de 3 ori mai mult?

Soluție

a) 2 caiete și 3 creioane costă ....144:4=36 lei........................2p

10 caiete și 15 creioane costă..............36X5=180 lei.........................2p

În total s-a încasat .... 144+180=324 lei........................1p

b) 2 caiete costă cât 6 creioane. Atunci 1 creion costă 36:9=4lei......2p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Subiectul 3.

O urna conține bile albastre și bile roșii. O persoană a inventat următorul joc: Extrage succesiv bile, una câte una, până când constată că pentru prima dată numărul bilelor albastre extrase este egal cu numărul bilelor roșii extrase. La unul dintre jocuri constată că în final au fost extrase 10 bile și că nu există trei bile de aceeași culoare extrase consecutiv. Să se arate că în această situație a cincea și a șasea bilă extrase au culori diferite.

Soluție

Începem jocul.

Cazul I. 1a,2a (altfel jocul se opreşte),3r (nu avem trei bile consecutive de aceeași culoare), 4a (altfel jocul se opreşte)..3p

Din acest moment avem doua sub cazuri: 5a implică 6r (altfel avem 3 bile consecutive de aceeași culoare sau 5r implică 6a (altfel jocul se opreşte)..2p

Cazul II este identic numai ca a devine r...1p

Continuarea jocului pană la bila a 10-a…………………………………………………1p.

Problema se poate rezolva si pornind de la bila a 10-a ,gândind la fel.

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015
CLASA a V-a
Barem

Subiectul 1.

Arătaţi că numărul : a = 3+9+15+21+....+12081+8058+4031, se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte consecutive.

Soluţie

$a=(1+3+5+...+4027)+(1+3+5+...+4027+4029)+(1+3+5+...+4027+4029+4031)=$…3p

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$ …1p

$a=2014^2+2015^2+2016^2$ …3p

Subiectul 2.

Determinaţi numerele prime p şi q pentru care:

$p^2 - q^2 = 10 + 5p$

Gazeta Matematică nr. 12/2014

Soluţie

$p^2-5p=10+q^2 \Rightarrow p(p-5)=10+q^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p>5 \\ p-prim \end{array}\right\} \Rightarrow$ p= impar $\Rightarrow p-5=$ par…3p

$\Rightarrow p(p-5)=$ par $\Rightarrow 10+q^2=$ par $\Rightarrow$ q este prim şi par $\Rightarrow q=2$…3p

$\Rightarrow p(p-5)=14 \Rightarrow p=7$ …1p

Subiectul 3.

În 16 cutii sunt în total 27 bile, fiecare cutie conţinând cel puţin una şi cel mult trei bile. Numărul cutiilor ce conţin o bilă nu este mai mic decât 7, iar numărul bilelor din cutiile ce conţin două sau trei bile este mai mare decât 17. Aflaţi câte cutii conţin o bilă, două bile, respectiv trei bile.

Soluţie

În cutiile cu 2 sau 3 bile, există cel puţin 18 bile. …1p
În cutiile cu 1 bilă, există cel mult 27-18= 9 bile…2p
Numărul cutiilor ce conţin o bilă poate fi 7,8 sau 9…1p
Caz I nr. cutii 1 bilă =7 $\Rightarrow$ 7 cutii cu 2 bile şi 2 cutii cu 3 bile…1p

Caz II nr. cutii 1 bilă =8 $\Rightarrow$ 5 cutii cu 2 bile şi 3 cutii cu 3 bile…1p

Caz III nr. cutii 1 bilă =9 $\Rightarrow$ 3 cutii cu 2 bile şi 4 cutii cu 3 bile…1p

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015
CLASA a VI-a
Barem

Subiectul 1.

Numerele $\overline{abc}$ au proprietatea $\overline{aaa}^2+\overline{bbb}^2+\overline{ccc}^2=1221^2$.

a) Determinaţi numerele $\overline{9bc}$.

b) Determinaţi numerele $\overline{abc}$.

R.M.T. nr. 4/2014-prelucrare

Soluţie

a) $\overline{999}^2+\overline{bbb}^2+\overline{ccc}^2=1221^2 \Rightarrow 81+b^2+c^2=121 \Leftrightarrow b^2+c^2=40$.

Dar $u(a^2),u(b^2),u(c^2)\in\{1,4,5,6,9\}$ $b\neq 0, c\neq 0 \Rightarrow b=2, c=6$ sau invers $\Rightarrow \overline{abc}\in\{962;926\}$…3p

b) Utilizând scrierea în baza 10 şi descompunerea în factori ai lui 1221, egalitatea din enunt devine

$\overline{aaa}^2+\overline{bbb}^2+\overline{ccc}^2=11^2\cdot 111^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=121$

Dar $u(a^2)\in\{0,1,4,5,6,9\}$ şi cum $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0 \Rightarrow u(a^2),u(b^2),u(c^2)\in\{1,4,5,6,9\}$

1) $u(a^2)=1\Rightarrow a\in\{1,9\}$

- $a=1\Rightarrow b^2+c^2=120\Rightarrow u(b^2+c^2)=0\Rightarrow u(b^2+c^2)=u(4+6)$ sau $u(1+9)$

  Analizând toate situaţiile $u(b^2)=4, u(c^2)=6$ şi $u(b^2)=1, u(c^2)=9$ nu obţinem soluţie.

- $a=9\Rightarrow b^2+c^2=40\Rightarrow b=2, c=6$

  Dar ordinea în $a^2+b^2+c^2=121$ nu contează , rezultă $\overline{abc}\in\{962;926;692;629;269;296\}$

2) $u(a^2)=4$ nu mai trebuie

3) $u(a^2)=6$ nu mai trebuie

4) $u(a^2)=9$ nu mai trebuie

5) $u(a^2)=5\Rightarrow b^2+c^2=96\Rightarrow u(b^2)\in\{1,5\}\Rightarrow u(b^2)=1\Rightarrow b\in\{1,9\}\Rightarrow c^2=95$ sau $c^2=15$ (fals)……………………………………………………………………………..4p

Subiectul 2.

a) Comparaţi numerele $a=\frac{2011}{2012}+\frac{2014}{2015}$ şi $b=\frac{2012}{2013}+\frac{2013}{2014}$

b) Generalizare: Comparaţi numerele $a=\frac{n}{n+1}+\frac{n+3}{n+4}$ şi $b=\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+2}{n+3}, n\in\mathbf{N}^*$.

Soluţie

a) $a=\frac{2011}{2012}+\frac{2014}{2015}=1-\frac{1}{2012}+1-\frac{1}{2015}=2-\frac{1}{2012}-\frac{1}{2015}$

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

$$b=\frac{2012}{2013}+\frac{2013}{2014}=1-\frac{1}{2013}+1-\frac{1}{2014}=2-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$$

$$\Rightarrow b=2-\frac{1}{2012}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=a+\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)-\left(\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right)$$

$$\Rightarrow b=a+\frac{1}{2012\cdot 2013}-\frac{1}{2014\cdot 2015}>a\Rightarrow b>a$$ 4p

b) Pentru cazul general procedam analog

$$a=\frac{n}{n+1}+\frac{n+3}{n+4}=2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}$$

$$b=2-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\left(2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

$$=a+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+3)(n+4)}>a\Rightarrow b>a$$ 3p

Subiectul 3.

Pe dreapta d alegem un punct O şi de aceeaşi parte a lui O, luăm punctele $A_1, A_2,..., A_k$ (în această ordine) astfel încât $OA_1=1, A_1A_2=2, A_2A_3=3,...etc.$ Pe semidreapta opusă lui $[OA_1$, considerăm punctele $B_1, B_2,..., B_p$ (de la dreapta la stânga) astfel încât $OB_1=p, B_1B_2=p-1, B_2B_3=p-2,...etc.$ Fie M mijlocul segmentului $[A_kB_p]$.

a) Aflaţi lungimea segmentelor $[OA_k]$ şi $[OB_p]$.

b) Aflaţi k şi p ştiind că $A_1M=3$.(toate segmentele sunt măsurate cu aceeaşi unitate de măsură)

Soluţie

a) $OA_k=\frac{k(k+1)}{2}, OB_p=1+2+3+..+p=\frac{p(p+1)}{2}$ 2p

b) $A_kB_p=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{p(p+1)}{2}\Rightarrow B_pM=\frac{k(k+1)}{4}+\frac{p(p+1)}{4}$

1) Dacă $k<p\Rightarrow M\in[OB_1$ şi $OM=OB_p-B_pM=\frac{p(p+1)}{4}-\frac{k(k+1)}{4}$

Dar $OM=A_1M-OA_1=3-1=2\Rightarrow\frac{p(p+1)}{4}-\frac{k(k+1)}{4}=2\Rightarrow$

$\Rightarrow(p-k)(p+k+1)=8\Rightarrow k=3, p=4$ 2p

2) Dacă $k>p\Rightarrow M\in[OA_1$ şi $OM=OA_k-A_kM=\frac{k(k+1)}{4}-\frac{p(p+1)}{4}$

Dar $OM=A_1M+OA_1=4\Rightarrow(k-p)(p+k+1)=16\Rightarrow k=8, p=7$ 2p

3) $k=p$ nu convine...1p

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015
CLASA a VII-a

Subiectul 1.

a) Fie *a*,*b*,*c*,*x*,*y*,*z* numere reale nenule astfel încât:

$$x = bc + \frac{1}{a}, y = ac + \frac{1}{b}, z = ab + \frac{1}{c} \text{ şi } ax + by + cz = 1.$$

Să se deducă o relaţie numai între *a*,*b*,*c* şi o relaţie numai între *x*, *y* şi *z*.

b) O foaie de dimensiune 9×9 este împărțită în 81 de pătrățele de dimensiuni 1×1 , pe care sunt scrise numerele de la 1 la 81, fiecare într-un pătrățel. Să se arate că există un pătrat de dimensiune 2×2 astfel ca suma numerelor din cele patru pătrățele să fie cel mult 198.

Soluţie.

a) $ax = abc + 1, by = abc + 1, cz = abc + 1$ **1p**

$ax + by + cz = 3abc + 3, ax + by + cz = 1 \Rightarrow abc = -\frac{2}{3}$ **1p**

$ax = abc + 1 \Rightarrow ax = \frac{1}{3}, analog\ by = cz = \frac{1}{3}$ **1p**

$x = \frac{1}{3a}, y = \frac{1}{3b}, z = \frac{1}{3c} \Rightarrow xyz = \frac{1}{27abc} \Rightarrow xyz = -\frac{1}{18}$ **1p**

b)
Din pătrat tăiem două benzi de lăţime 1, rămânând un pătrat 8×8 pe care-l împărţim în 16 pătrate de dimensiuni 2×2 ....**1p**

S-au eliminat 17 pătrăţele, deci suma numerelor din pătraţele rămase este cel mult 18+19+...+81=99· 32.

Suma numerelor din cele 16 pătrate de dimensiuni 2×2 este cel mult 99· 32 ....**1p**

Deci cel puţin unul din pătrate va avea suma numerelor cel mult $\frac{99 \cdot 32}{16} = 99 \cdot 2 = 198$ ……. **1p**

Subiectul 2.

Se consideră trapezul ABCD cu AB|| CD. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului, M mijlocul segmentului BC şi N mijlocul segmentului AD. Să se arate că perimetrul triunghiului MON este jumătate din perimetrul trapezului ABCD dacă şi numai dacă diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

Soluţie.

$\Rightarrow$ Dacă AC ⊥ BD atunci △ AOD şi △ BOC sunt dreptunghice în O

OM, ON mediane $\Rightarrow OM = \frac{BC}{2}$ şi $ON = \frac{AD}{2}$..**1p**

MN linie mijlocie în trapez$\Rightarrow MN = \frac{AB+CD}{2}$..**1p**

$\mathcal{P}_{OMN} = OM + ON + MN = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{AB+CD}{2} = \frac{\mathcal{P}_{ABCD}}{2}$.. .**1p**

$\Leftarrow$ Dacă $\mathcal{P}_{OMN} = \frac{\mathcal{P}_{ABCD}}{2} \Rightarrow OM + ON + MN = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{AB+CD}{2} \Rightarrow OM + ON = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$...........**1p**

Dacă $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle BOC) < 90^\circ\ atunci\ ON > \frac{AD}{2}$ şi $OM > \frac{BC}{2} \Rightarrow OM + ON > \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$.........**1p**

Dacă $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle BOC) > 90^\circ\ atunci\ ON < \frac{AD}{2}$ şi $OM < \frac{BC}{2} \Rightarrow OM + ON < \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2}$..........**1p**

Deci $OM + ON = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$ **1p**

Subiectul 3.

Se consideră o mulţime $A\subset\mathbf{Z}$ care are proprietăţile:

(1) $0\in A$

(2) dacă $a,b\in\mathbf{Z}$ şi $2a-3b\in A$ atunci $a\in A$ şi $b\in A$.

Să se arate că $A=\mathbf{Z}$.

Gazeta Matematică nr. 12/2014

Soluţie.

Fie $a=3k$, $b=2k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Atunci $2a-3b=0\in A$ şi aplicând propritatea (2) rezultă că $3k\in A$ şi $2k\in A$ pentru orice $k\in\mathbf{Z}$ **3p**

În particular $3\in A$.

Fie $a=3k+3$, $b=2k+1$, $k\in\mathbf{Z}$.

Atunci $2a-3b=3\in A$ şi aplicând proprietatea (2) rezultă că $3k+3\in A$ şi $2k+1\in A$ pentru orice $k\in\mathbf{Z}$ **3p**

$2k\in A$,$2k+1\in A$ pentru orice $k\in\mathbf{Z}\Longrightarrow \mathbf{Z}\subset A$ şi $\mathbf{A}\subset\mathbf{Z}$, deci $A=\mathbf{Z}$ **1p**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015
CLASA a VIII-a
Barem

Subiectul 1.

Fie suma $S_n = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

a) Să se determine S_n.

b) Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, avem $S_n < \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{2} - 1$?

Soluţie

a) $\frac{S_n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{8}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n+2\sqrt{n^2-1}}}$ 1p

$= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{4}+\sqrt{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}} \ldots + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2}}$ 1p

$= \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ 1p

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \ldots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-1}{2}$ 1p

$\Rightarrow S_n = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ 1p

b)
$S_n < \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{2}} < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{n+1} - 1 < 2$
$\Rightarrow \sqrt{n+1} < 3 \Rightarrow n+1 < 9 \Rightarrow n < 8$, dar $n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \Rightarrow n \in \{2,3,\ldots,7\}$................................2p

Subiectul 2.

a) Dacă $a, b \in \mathrm{N}$ şi $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathrm{N}$, să se demonstreze că $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbf{N}$.

b) Determinaţi valorile lui $n \in \mathbf{N}$ pentru care $\sqrt{2009+n} + \sqrt{2009-n} \in \mathbf{N}$.

Soluţie

a) Presupunem $a, b \in \mathbf{N}, a > b$ şi $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathrm{N}$. Putem raţionaliza şi obţine $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \in \mathrm{N}$, de unde $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathrm{N}$ 1p

De unde rezultă că $2\sqrt{a} \in \mathbf{N} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{N}, (m,n) = 1 \Rightarrow a \cdot n^2 = m^2$

$\Rightarrow n \mid m^2 \Rightarrow n \mid m \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = n \in \mathbf{N}$

Se analizează şi cazul $a=b$……………………………………………………..2p

b) Observăm că $n = 0$ nu convine.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ deducem că $\sqrt{2009+n}$, $\sqrt{2009-n} \in \mathbf{N}$.

Notăm atunci $2009+n = k^2, 2009-n = p^2, k, p \in \mathbf{N}, k > p \Rightarrow k^2 + p^2 = 4018$...1p

Cum $7 \mid 4018$ examinăm resturile posibile ale împărţirii lui k şi p la 7. Un pătrat perfect poate da resturile 0, 1, 2 sau 4 la împărţirea cu 7, deci, pentru ca $7 \mid k^2 + p^2$ trebuie $7 \mid k$ şi $7 \mid p$......1p

Atunci $k = 7a, p = 7b, a, b \in N, a > b$ şi obţinem $a^2 + b^2 = 82$...................................1p

Singura varianta este $a = 9, b = 1 \Rightarrow k = 63, p = 7 \Rightarrow n = 1960$......................................1p

Subiectul 3.

Fie triunghiul ABC şi notăm $a = BC, b = AC, c = AB, a \neq b \neq c \neq a$. În vârfurile triunghiului ABC, de aceeaşi parte a planului se ridică perpendicularele $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{3}, BB' = \frac{b\sqrt{3}}{3}$, $CC' = \frac{c\sqrt{3}}{3}$.
Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar cu O' centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$.

Să se arate că

a) $[GA'] \equiv [GB'] \equiv [GC']$

b) $GO' \perp (A'B'C')$

Soluţie

a) În ΔABC avem $AG = \frac{2}{3} m_a$ şi $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ 1p

$\Rightarrow AG^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$ 1p

Aplicând T. Pitagora în $\Delta AGA'$ obţinem $GA'^2 = AA'^2 + AG^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9} =$
$\frac{2(b^2+c^2+a^2)}{9}$ 1p

Analog $GB'^2 = GC'^2 = \frac{2(b^2+c^2+a^2)}{9}$ 1p

Deci $[GA'] \equiv [GB'] \equiv [GC']$...1p

b) Din $[GA'] \equiv [GB'] \equiv [GC']$ şi O' centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$
$\Rightarrow GO' \perp (A'B'C')$...2p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro
COLEGIUL NATIONAL VASILE LUCACIU

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015
CLASA a IX-a
Barem

Subiectul 1.

Să se determine partea întreagă a numărului

$$E=\frac{x}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)\cdot(y+x)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)\cdot(z+y)}},\quad x,y,z>0.$$

Soluţie

Utilizând $\frac{1}{\sqrt{a\cdot b}}\geq\frac{2}{a+b},\forall a,b>0.$ **(2p)** obţinem $\frac{x}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}}\geq\frac{2x}{2x+y+z}>\frac{2x}{2x+2y+2z}$

Scriind relaţiile analoage şi însumându-le se obţine E>1………………………**2p**

$$E=\sqrt{\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x}{x+z}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}\cdot\frac{y}{y+x}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}\cdot\frac{z}{z+y}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y}\right)=\frac{3}{2}$$ **2p**

Deci $1<E\leq\frac{3}{2}\Rightarrow[E]=1$...**1p**

Subiectul 2.

a) Să se arate că triunghiurile *ABC* şi $A_1B_1C_1$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

b) Să se arate că dacă triunghiul $A_2B_2C_2$ este triunghiul median al triunghiului ABC (triunghiul format de mijloacele laturilor triunghiului ABC), atunci ele au acelaşi centru de greutate.

c) Pe laturile unui triunghi ABC considerăm $M\in(AB),N\in(BC),P\in(CA)$. Notăm cu H_i respectiv O_i , $i=\overline{1,3}$ ortocentrele, respectiv centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BMN, CNP, AMP. Arătaţi că dacă $\overrightarrow{AH_1}+\overrightarrow{BH_2}+\overrightarrow{CH_3}=\vec{0}$, atunci triunghiurile $O_1O_2O_3$ şi MNP au acelaşi centru de greutate.

Soluţie

a) Fie G şi G_1 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$

$\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1G_1},\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1G_1},\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1G_1}$

Prin însumarea acestor relaţii şi utilizând $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, se obţine

$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=3\overrightarrow{GG_1}$

Triunghiurile au acelaşi centru de greutate $\Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.**2p**

b) Fie A_2 mijlocul lui $[BC]$, B_2 mijlocul lui $[AC]$, C_2 mijlocul lui $[AB]$

$\overrightarrow{AC_2}+\overrightarrow{BA_2}+\overrightarrow{CB_2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$.Utilizând a) rezultă concluzia.......**1p**

c) Din relaţia lui Sylvester avem

$\overrightarrow{O_1H_1}=\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_1N}, \overrightarrow{O_2H_2}=\overrightarrow{O_2C}+\overrightarrow{O_2P}+\overrightarrow{O_2N}, \overrightarrow{O_3H_3}=\overrightarrow{O_3A}+\overrightarrow{O_3M}+\overrightarrow{O_3P}$ (1).....**1p**

$\vec{0}=\overrightarrow{AH_1}+\overrightarrow{BH_2}+\overrightarrow{CH_3}=\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1H_1}\right)+\left(\overrightarrow{BO_2}+\overrightarrow{O_2H_2}\right)+\left(\overrightarrow{CO_3}+\overrightarrow{O_3H_3}\right)=$

$\overset{(1)}{=}\left(\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_1N}\right)+\left(\overrightarrow{O_2P}+\overrightarrow{O_2N}\right)+\left(\overrightarrow{O_3M}+\overrightarrow{O_3P}\right)$..**1p**

Fie X,Y,Z mijloacele laturilor $[MP],[MN],[PN]$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_1N}=2\overrightarrow{O_1Y}, \overrightarrow{O_2P}+\overrightarrow{O_2N}=2\overrightarrow{O_2Z}, \overrightarrow{O_3M}+\overrightarrow{O_3P}=2\overrightarrow{O_3X}$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1Y}+\overrightarrow{O_2Z}+\overrightarrow{O_3X}=\vec{0}\overset{a)}{\Rightarrow} O_1O_2O_3$, XYZ au acelaşi centru de greutate

Cum XYZ este triunghiul median al triunghiului MNP rezultă concluzia…………......**2p**

Subiectul 3.

Să se arate că ecuaţia $x^3+y^3+z^3=\left(x+y+z\right)^2$ are:

a) cel puţin două soluţii în $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ cu $x\le y\le z$.

b) o infinitate de soluţii în $\mathbf{Z}^*\times\mathbf{Z}^*\times\mathbf{Z}^*$.

Gazeta Matematică nr. 11/2014

Soluţie

a) Identificarea unei soluţii (de exemplu $x=1, y=2, z=3$)....................**2p**

Identificarea altei soluţii (de exemplu , pentru $x=y=z$ se obţine $x=y=z=3$)....**2p**

b) Luăm , de exemplu $z=-y$ şi obţinem $x^3=x^2\overset{x\neq0}{\Rightarrow}x=1$

Deci $(1,y,-y), y\in\mathbf{Z}^*$ sunt soluţii ale ecuaţiei...**3p**

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015
CLASA a X-a
Barem

Subiectul 1.

Fie f,g: $[0,1]\to \mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{(1-x)\cdot x}}$ şi $g(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$. Să se arate că:

$$\max_{x\in[0,1]}\left(f(x)+g(x)\right)=\min_{x\in[0,1]} f(x)+\max_{x\in[0,1]} g(x)$$

Gotha Güntter, elev, Baia-Mare

Soluţie

$$\sqrt{(1-x)x}\le \frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\sqrt{(1-x)x}\ge \frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)\ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \min_{x\in[0,1]} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2p

$$m_a\le m_p\Rightarrow \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}{2}\le\sqrt{\frac{1-x+x}{2}}\Rightarrow \frac{g(x)}{2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow g(x)\le\sqrt{2}$$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow \max_{x\in[0,1]} f(x)=\sqrt{2}$ 2p

$$f(x)+g(x)\le\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{(1-x)x}-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow \max_{x\in[0,1]}\left(f(x)+g(x)\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}$ 3p

Subiectul 2.

a) Fie a şi b două numere reale astfel încât $147^a=3$ şi $147^b=7$. Să se calculeze $4^{\frac{1-a-b}{1-a}}$.

b) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$. Să se deducă $\log_a(9bc)+\log_b(9ac)+\log_c(9ab)\ge 0$
Pentru ce valori ale numerelor a, b, c are loc egalitatea?

Soluţie

a) $a=\log_{147}3, b=\log_{147}7$

$$\frac{1-a-b}{1-a}=1-\frac{b}{1-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4^{\frac{1-a-b}{1-a}}=4^{\frac{1}{2}}=2$$ ………………………………………………….2p

b) $3\sqrt[3]{abc}\le a+b+c=1\Rightarrow abc\le\frac{1}{27}\Rightarrow \lg a+\lg b+\lg c\le 3\lg\frac{1}{3}$ **(1)**……………………..1p

$$E=\log_a(9bc)+\log_b(9ac)+\log_c(9ab)=\frac{\lg 9+\lg b+\lg c}{\lg a}+\frac{\lg 9+\lg a+\lg c}{\lg b}+\frac{\lg 9+\lg b+\lg a}{\lg c}$$ …..1p

Din $a,b,c>0$, $a+b+c=1\Rightarrow a,b,c\in(0,1)$

Fie $x=-\lg a>0, y=-\lg b>0, z=-\lg c>0\Rightarrow E=(x+y+z-\lg 9)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$…………..1p

(1) $\Leftrightarrow 3\lg\frac{1}{3}\ge-(x+y+z)\Rightarrow 2\lg\frac{1}{3}\ge-\frac{2}{3}(x+y+z)\Rightarrow-\lg 9\ge-\frac{2}{3}(x+y+z)$

$\Rightarrow x+y+z-\lg 9\ge\frac{1}{3}(x+y+z)\Rightarrow(x+y+z-\lg 9)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$……1p

Dar $m_a\ge m_g\Rightarrow(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9\Rightarrow\Rightarrow(x+y+z-\lg 9)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 3\Rightarrow E\ge 0$

Egalitatea are loc pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$ …………………………………………………………….1p

Subiectul 3:

Se consideră patrulaterul convex ABCD cu BC=CD. Fie punctul M situat în acelaşi semiplan determinat de dreapta AB cu punctul D astfel încât AM=BM şi $\sphericalangle AMB\equiv\sphericalangle BCD$. Să se calculeze m($\sphericalangle BCD$) ştiind că AD = $\sqrt{3}\cdot MC$.

Soluţie

Fie a,b,c,d,m afixele punctelor A, B, C, D. Fie $\alpha=$ m($\sphericalangle BCD$) şi fie $\varepsilon=\cos\alpha+i\sin\alpha$…1p

$A=r_M^\alpha(B)\Rightarrow a=m+(b-m)\cdot\varepsilon\Rightarrow a-m=(b-m)\cdot\varepsilon$ **(1)**…………………………………………1p

$D=r_C^\alpha(B)\Rightarrow d=c+(b-c)\cdot\varepsilon\Rightarrow d-c=(b-c)\cdot\varepsilon$ **(2)** ………………………………………….1p

Din (1) şi (2) rezultă $d-a=(m-c)\cdot(\varepsilon-1)\Rightarrow|d-a|=|m-c|\cdot|\varepsilon-1|\Rightarrow|\varepsilon-1|=\frac{AD}{MC}$ ……………….2p

Dar $\frac{AD}{MC}=\sqrt{3}\Rightarrow|\varepsilon-1|=\sqrt{3}\Rightarrow=(\varepsilon-1)(\bar{\varepsilon}-1)=3\Rightarrow\varepsilon+\bar{\varepsilon}=-1\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{2}\overset{\alpha\in(0,\pi)}{\Rightarrow}\alpha=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$ m($\sphericalangle BCD)=120^\circ$ ………………………………………………….2p

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015
CLASA a XI-a
Barem

Subiectul 1.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ şi $M=\{X\in\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})/A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Să se arate că dacă $X\in M$, atunci există a,b,c numere reale astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$.

b) Să se arate că dacă $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$,atunci există şirurile de numere reale$(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$astfel încât $X^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n&c_n\\c_n&a_n&b_n\\b_n&c_n&a_n\end{pmatrix}$ şi $a_n+b_n+c_n=(a+b+c)^n$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Să se rezolve în $\mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$ ecuaţia $X^{2015}=A$.

Soluţie.

a) Fie $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$A\cdot X=X\cdot A\Leftrightarrow a=e=i \text{ și } b=g=f \text{ și } c=d=h.$ **2p**

b) Se demonstrează prin inducţie matematică că $X^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n&c_n\\c_n&a_n&b_n\\b_n&c_n&a_n\end{pmatrix}$ şi $a_n+b_n+c_n=(a+b+c)^n$ pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

Pentru $n=1$ avem $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$, deci $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$

Presupunem $X^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n&c_n\\c_n&a_n&b_n\\b_n&c_n&a_n\end{pmatrix}$ și $a_n+b_n+c_n=(a+b+c)^n$.

$$X^{n+1}=X^n\cdot X=\begin{pmatrix}a_n&b_n&c_n\\c_n&a_n&b_n\\b_n&c_n&a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}&b_{n+1}&c_{n+1}\\c_{n+1}&a_{n+1}&b_{n+1}\\b_{n+1}&c_{n+1}&a_{n+1}\end{pmatrix}$$

unde $a_{n+1}=a\cdot a_n+c\cdot b_n+b\cdot c_n$,

$b_{n+1} = b \cdot a_n + a \cdot b_n + c \cdot c_n$, $c_{n+1} = c \cdot a_n + b \cdot b_n + a \cdot c_n$ şi

$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = (a_n + b_n + c_n)(a + b + c) = (a + b + c)^{n+1}$ **2p**

c) $X^{2015} = A \Rightarrow X \in M \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \Rightarrow X^{2015} = \begin{pmatrix} a_{2015} & b_{2015} & c_{2015} \\ c_{2015} & a_{2015} & b_{2015} \\ b_{2015} & c_{2015} & a_{2015} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$a_{2015} = 0, b_{2015} = 1, c_{2015} = 0.$

$a_{2015} + b_{2015} + c_{2015} = (a + b + c)^{2015} \Rightarrow (a + b + c)^{2015} = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$..................**1p**

$(\det(X))^{2015} = \det(A) = 1 \Rightarrow \det(X) = 1 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$

$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 1 \Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2$ **1p**

$a, b, c \in \mathbf{Z} \Rightarrow a = b = 0$ și $c = 1$ sau $c = b = 0$ și $a = 1$ sau $c = a = 0$ și $b = 1$

Dacă $a = b = 0$ și $c = 1$, atunci $X = A$ și pt. că $A^3 = I_3 \Rightarrow X^{2015} = A^{2015} = A^2 \neq A$

Dacă $c = b = 0$ și $a = 1$, atunci $X = I_3 \Rightarrow X^{2015} = I_3 \neq A$

Dacă $c = a = 0$ și $b = 1$, atunci $X = A^2 \Rightarrow X^{2015} = A^{4030} = A$. **1p**

Subiectul 2.

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$, $n \geq 1$.

a) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}\right)$.

Soluţie.

a) $a_n > 0$, $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+na_n} < 1 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ convergent. **2p**

b) Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. $a_n > 0 \Rightarrow l \geq 0$.

Dacă $l > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(1 + na_n) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1 + na_n} = 0 \Rightarrow l = 0$ contradicție, deci $l = 0$ ..**2p**

Aplicând Stolz – Cesaro obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{a_{n+1}}}{(n+1)^4 - n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{n+1}{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1} \text{ .... } \mathbf{1p}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{n^2(n+1)}{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{n^2} = \text{ .... } \mathbf{1p}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}}}{2n+1} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1 + (n+1)a_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}}}{2n+1} = \frac{1}{8} \text{ .... } \mathbf{1p}$$

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Subiectul 3.

a) Să se arate că pentru orice două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc relația:

$$\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det(A)+\det(B))$$

b) Fie A o matrice de ordin doi cu elemente reale şi A^t matricea transpusă.

Ştiind că $\det(A+A^t)=8$ şi $\det(A+2A^t)=27$, să se calculeze $\det(A)$.

Gazeta Matematică nr.11/2014

Soluţie.

a)Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$det(A+B)=\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{vmatrix}=ad+at+dx+tx-bc-bz-cy-yz$$

$$det(A-B)=\begin{vmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-t \end{vmatrix}=ad-at-dx+tx-bc+bz+cy-yz$$

$$det(A+B)+det(A-B)=2(ad-bc+tx-yz)=2(detA+detB)$$

b)$det(A+A^t+A^t)+det(A+A^t-A^t)=2(det(A+A^t)+det(A^t)) \Leftrightarrow$

$$27+detA=2det(A+A^t)+2\det(A) \Leftrightarrow 27=16+\det(A) \Leftrightarrow \det(A)=11$$

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a X-a, Baia Mare, 24 ianuarie 2015
CLASA a XII-a
Barem

Subiectul 1.

Să se calculeze

a) $\int \sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 9x dx, x \in \mathbf{R}$

b) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx, x \in \mathbf{R}$

Soluţie

a) $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \Rightarrow \sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 9x = \frac{1}{4}(\sin 11x + \sin 7x - \sin 13x - \sin 5x)$

$\Rightarrow \int \sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 9x dx = -\frac{1}{44}\cos 11x - \frac{1}{28}\cos 7x + \frac{1}{52}\cos 13x + \frac{1}{20}\cos 5x + C$ **3p**

b) Pentru $x<0$ avem $G(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$.

Notând $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$ şi $x^2+\frac{1}{x^2} = t^2+2 \Rightarrow G(t) = \int \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C$

$\Rightarrow G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C$ **2p**

O primitivă pentru *f* poate fi de forma

$F(x) = \begin{cases} G(x)+c_1, & x<0 \\ c_2, & x=0 \\ G(x)+c_3, & x>0 \end{cases} \Rightarrow F$ folosind continuatitatea în $x=0$ şi luând $c_1=0$ obţinem

$c_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, c_3 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}, & x<0 \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x>0 \end{cases}$ şi $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = F(x)+C, x \in \mathbf{R}$ **2p**

Subiectul 2.

Fie $(G,\cdot)$ ungrup şi mulţimea $Z(G)=\{x\in G | xy=yx, \forall y\in G\}$. Dacă $x^2=e$, pentru orice $x\in G-Z(G)$, atunci G este comutativ.

Gazeta Matematică nr. 12 / 2014

Soluţie

Fie $H=Z(G)=\{x\in G | xy=yx, \forall y\in G\}$. Trebuie demonstrat că $xy=yx, \forall x,y\in G$. **(1)**

Dacă cel puţin unul din elementele x, y se află în H, atunci relaţia **(1)** este adevărată deoarece elementele lui H comută cu orice element din G...**2p**

În caz contrar, fie $x,y\in G-H \Rightarrow x^2=e, y^2=e \Rightarrow x^{-1}=x\in G-H$ şi $y^{-1}=y\in G-H$ **1p**

1) Dacă $yx\in G-H \Rightarrow (yx)^2=e \Rightarrow yx=(yx)^{-1}$ şi $xy=x^{-1}y^{-1}=(yx)^{-1} \Rightarrow xy=yx$.......**2p**
2) Dacă $yx\notin G-H \Rightarrow yx\in H \Rightarrow yx=h\in H \Rightarrow x=y^{-1}h=yh=hy$. Avem $xy=yhy=xy \Rightarrow$ $xy=yx$ **2p**

De unde $xy=yx, \forall x,y\in G$

Subiectul 3.

Fie $I=\int \frac{x^{11}}{x^{16}+1}dx, x>0$ şi $J=\int \frac{x^3}{x^{16}+1}dx, x>0$. Calculaţi $I+J, I-J$ şi apoi I.

Soluţie

$$I+J=\int \frac{x^{11}+x^3}{x^{16}+1}dx=\int \frac{x^3+\frac{1}{x^5}}{x^8+\frac{1}{x^8}}dx=\frac{1}{4}\int \frac{\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)'}{\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)^2+2}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x^4-\frac{1}{x^4}}{\sqrt{2}}+C \text{ .....3p}$$

$$I-J=\int \frac{x^{11}-x^3}{x^{16}+1}dx=\int \frac{x^3-\frac{1}{x^5}}{x^8+\frac{1}{x^8}}dx=\frac{1}{4}\int \frac{\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)'}{\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2-2}dx=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4+\frac{1}{x^4}-\sqrt{2}}{x^4+\frac{1}{x^4}+\sqrt{2}}\right|+C \text{ ...3p}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{8\sqrt{2}}arctg\frac{x^4-\frac{1}{x^4}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{16\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4+\frac{1}{x^4}-\sqrt{2}}{x^4+\frac{1}{x^4}+\sqrt{2}}\right|+C \text{ ....1p}$$